doi: 10.11845/sxjz.2021160b

带迫力项和 $2p+1$ 次非线性项的二维非线性薛定谔方程的 KAM 定理

薛帅帅

(南京审计大学数学学院, 南京, 江苏, 211815)

摘要: 本文证明了一个无穷维 KAM 定理, 并用它来研究周期边界条件下带不同的大迫力项且非线性项为 $2p+1$ 次的二维非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}u_t-\Delta u+\varphi_1(\bar{\omega}_1 t)u+\varphi_2(\bar{\omega}_2 t)|u|^{2p}u=0,\quad t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{T}^2,$$

证明了该方程存在一族 Whitney 光滑的、可约的小振幅拟周期解.

关键词: 薛定谔方程; 可约化的 KAM 环面; 小除数; 拟周期解
MSC(2020) 主题分类: 37K55; 35B10; 35J10; 35Q40; 35Q55
中图分类: O175.29; O193
文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2023)04-0673-20

0 引言

过去几十年间, 非线性哈密顿偏微分方程 KAM 理论的研究取得了许多优秀成果. 人们一直关注哈密顿扰动影响下一个线性或可积方程拟周期解的存在性问题. Kuksin[17] 和 Wayne[24] 在这方面最早取得了突破, 研究了一维 Dirichlet 边界条件下的半线性波方程和薛定谔方程的周期解或拟周期解. Bourgain[2] 给出了周期边界条件下的一维半线性波方程和薛定谔方程周期解的存在性. Bourgain 等人 [3–8] 改善了 Craig 和 Wayne[10] 引进的牛顿迭代技巧, 将其发展为 CWB 方法. 这些文章中主要使用了 Lyapunov–Schmidt 分岔分析和 Nash–Moser 隐函数迭代程序. 相比 Dirichlet 边界条件, 周期边界条件下的法向频率不再是单的, 而 CWB 这套方法通过求解一个变系数 (和角变量相关) 的同调方程, 克服了多重法向频率造成的困难, 绕开了第二 Melnikov 条件 (即此条件不是必需的), 但是这套方法在环面附近只给出了一个不可约的标准形, 所以不能给出拟周期解的稳定性信息.

后来, Chierchia–You[9] 通过另外一种源于经典 KAM 理论的方法 (见 [1, 11–12, 16, 18–19]) 给出了一维半线性波方程在周期边界条件下线性稳定的可约 KAM 环面. 简单来讲, 这些文章都需要建立无穷多步迭代过程, 需要在每步迭代中构造一个辛变换, 目的是将上一步的哈密顿函数变成一个 “更好” 的标准形加上一个更小的扰动. 这就需要每步都去解一个常系数的同调方程 (组), 同时需要保证求解的过程中不出现 “小除数” 现象 (这是 KAM 的本质), 所以必须假设第二 Melnikov 非共振条件, 从而不可避免地需对参数集进行挖测度操作. 最终应该保证迭代的收敛性以及挖掉的参数集合测度是小的. 其中, 标准形分析可以给出所求拟周期解的频率和振幅的

收稿日期: 2021-09-22. 修改稿收到日期: 2022-09-09. 录用日期: 2022-10-27.
基金项目: 国家自然科学基金 (Nos. 12001275, 12001276).
E-mail: ssx@nau.edu.cn

不同, 从而保证留下来的参数集合是一个近乎全测的集合, 同时还能给出方程的拟周期解的线性稳定性, 这是比 CWB 方法有优势的地方 (关于有限维和无穷维空间上的 KAM 理论见 [26]).

对于空间维数等于 1 的情形, 目前已经建立了非常理想的体系. 但对于空间维数大于等于 2 的情形, 研究的结果还不够理想, 主要因为随着 $n \to \infty$, 法向频率的重数也趋于无穷大, 带来了很大的困难. 其中 Bourgain[3] 给出了先驱的工作, 通过 Lyapunov–Schmidt 等技巧, 使用预解恒同给出了有小特征值的无穷维矩阵逆的控制,同时说明了逆矩阵具有远离对角线的指数衰减性质, 从而证明了二维的非线性薛定谔方程有小振幅的拟周期解. Eliasson–Kuksin[12] 给出另一个标志性的成果, 作者通过修改的 KAM 方法构造了更有趣的高维非线性薛定谔方程的小振幅线性稳定的拟周期解. [12] 最重要的贡献是给出了 Töplitz–Lipschitz 性质, 证明了无穷远 ∞ 的邻域可以用有限多个 Lipschitz 域覆盖, 开创性地给出了高维情形下测度估计的可行性方法 (推广的拟 Töplitz 函数参考文 [22]). 这里也提及耿建生等人 [13] 推广 Bourgain[3] 的二维不变环面的结果, 他们证明了任意有限维不变环面的存在性, 并获得了形式更好的标准形. [13] 本质地利用了 Eliasson–Kuksin 的 Töplitz–Lipschitz 性质, 用了一种更易理解的累次极限形式, 进行了关键的测度估计. [13] 中 "容许集" 概念的引入, 目的在于使标准形的形式足够简洁, 从而保证同调方程组最多是四阶的方程组, 便于同调方程组的求解. 其中 [3, 12] 中的方程含有傅里叶乘子或卷积位势作为外部参数. 这些含 "参数" 的方程更便于通过参数的选择去避免共振现象的出现. 而 [13] 是不含外部参数的完全共振的模型, 耿建生等人 [13] 沿用了 Bourgain 的想法, 通过选择合适的切点集合, 仅激发切点的傅里叶指标, 给出了 cubic 薛定谔方程的容许集的定义, 并给出了具体的构造方法. 这里也提及 M. Pröcesi 和 C. Pröcesi[20–21] 推广到任意有限维的具有平移不变性质的 cubic 薛定谔方程的结果, 以及 [23] 证明了能量超临界的 d 维非线性薛定谔方程存在小振幅的拟周期解. 从某种程度上看, [20–21] 中关于切点通用性质和 [23] 中关于切点的假设条件是平行的.

本文将把容许集的形式推广到适合处理薛定谔方程更一般的非线性项情况. 这里需要说明, 本文推广的容许集的形式与 [20–21] 在某种程度上是一致的.

文 [14] 已经证明了具有大迫力项且非线性项为 3 次的 2 维薛定谔方程

$$\mathrm{i}u_t - \Delta u + \varphi(\bar{\omega}t)u + \varphi(\bar{\omega}t)|u|^2u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{T}^2$$

存在拟周期解. 作者通过整理标准形前进行一步辛变换处理掉了大迫力项 (只剩平均项), 沿用了文 [13] 中针对 cubic 薛定谔方程的容许集概念, 同时保留了第二型共振类型对应特征值有虚根的条件, 从而得到的是部分双曲的环面. 关于容许集的推广, 文 [15] 已经证明了周期边界条件下非线性项为 5 次的 2 维薛定谔方程

$$\mathrm{i}u_t - \Delta u + |u|^4u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{T}^2$$

存在小振幅的拟周期解. 这里作者将适用于非线性项为 3 次的容许集推广到适用于非线性项为 5 次的容许集, 在推广过程中发现标准形会变得更加复杂, 难以准确验证容许集的存在性. 可想而知, 如果将非线性项次数直接推广到一般的 $2p+1$, 那么验证相关性质几乎不可能, 这也是本文的出发点.

[13] 中的容许集和 [20–21] 中的通用性条件只能用于处理空间维数为 2 的情况; 当空间维数大于 2 时, 标准形难以准确梳理. 因此, 为发展 KAM 理论, 本文处理周期边界条件

$$u(t, x_1 + 2\pi, x_2) = u(t, x_1, x_2 + 2\pi) = u(t, x_1, x_2)$$

下具有不同大迫力项且非线性项为 $2p+1$ 次的 2 维薛定谔方程

$$\mathrm{i}u_t - \Delta u + \varphi_1(\bar{\omega}_1 t)u + \varphi_2(\bar{\omega}_2 t)|u|^{2p}u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{T}^2, \tag{0.1}$$

其中 $\varphi_1(\bar{\omega}_1 t)$ 和 $\varphi_2(\bar{\omega}_2 t)$ 分别关于 $\bar{\theta}_1 = \bar{\omega}_1 t$ 和 $\bar{\theta}_2 = \bar{\omega}_2 t$ 实解析, 受迫频率 $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ 是满足条件

$$\|\langle \bar{k}, \bar{\omega}\rangle\|_{\mathbb{Z}} \triangleq |\langle \bar{k}, \bar{\omega}\rangle + l| \geq \frac{\gamma}{|\bar{k}|^{\tau}}, \quad \bar{k} \neq 0,\ l \in \mathbb{Z}$$

的固定丢番图向量.

我们强调: 首先, 相比于 [14] 中两个相同的大迫力项, 本文中 $\varphi_1(\bar{\omega}_1 t)$ 和 $\varphi_2(\bar{\omega}_2 t)$ 是不小的并且是不同的, 这将会造成本文后面构造变换的函数与之前所提文献中的情形发生一些变化; 其次, 本文去掉了 [14] 中关于第二型共振类型对应特征值有虚根的条件, 这就会造成小除数会更加的复杂, 原本规避掉的小除数条件, 本文需要重新考虑并且进行挖测度操作; 最后, 重点强调本文的非线性项次数是一般的 $2p+1$ 次, 这是由于考虑到现实中许多来自于物理的模型, 其非线性项次数是一般的情况, 必然会加大第一步整理标准形的复杂性以及造成验证相关性质的困难性, 这种困难性也是由于薛定谔方程本身的复杂性造成的, 标准形的整理是本文最重要的一部分内容. 因此, 本文的主要工作是解决所需 KAM 定理证明中出现的上述困难之处, 而其他的框架性证明, 由于篇幅所限, 请参考我们之前的文章 [14–15].

将 (0.1) 化为无穷维哈密顿系统

$$u_t = \mathrm{i}\frac{\partial H}{\partial \bar{u}}. \tag{0.2}$$

令

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} q_n \phi_n(x),$$

则哈密顿系统 (0.2) 等价于格点哈密顿方程

$$\dot{q}_n = \mathrm{i}\left(\lambda_n q_n + \varphi_1(\bar{\omega}_1 t)q_n + \frac{\partial G}{\partial \bar{q}_n}\right),$$

其中

$$G \equiv \frac{1}{(p+1)(2\pi)^{2p}}\varphi_2(\bar{\omega}_2 t)\sum_{k_1-k_2+k_3-k_4+\cdots+k_{2p+1}-k_{2p+2}=0} q_{k_1}\bar{q}_{k_2}q_{k_3}\bar{q}_{k_4}\cdots q_{k_{2p+1}}\bar{q}_{k_{2p+2}},$$

对应的哈密顿函数为

$$H = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \lambda_n |q_n|^2 + \varphi_1(\bar{\omega}_1 t)|q_n|^2 + G = N + G,$$

这里的 $\{\lambda_n\} = |n|^2 = |n_1|^2 + |n_2|^2$, $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ 是算子 $A = -\Delta$ 在周期边界条件下的特征值, 并且对应的特征向量 $\phi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle n, x\rangle}$ 组成了一组基.

为了方便定义容许集, 下面我们引入两个线性映射和一个集合.

$$\pi : \mathbb{Z}^b \to \mathrm{Span}(S), \quad \pi(e_j) = i_j,$$

$$\eta : \mathbb{Z}^b \to \mathbb{Z}, \quad \eta(e_j) = 1,$$

其中 $\mathrm{Span}(S)$ 是由基 $\{i_1, \cdots, i_b\} \subset \mathbb{Z}^2$ 张成的整系数的空间, 而 $e_1, \cdots, e_b$ 是格点 $\mathbb{Z}^b$ 的标准基.

定义 0.1 考虑集合

$$X_p := \left\{ l := \sum_{k=1}^{2p} \pm e_{j_k} = \sum_{j=1}^{b} l_j e_j, \ l \neq 0, -2e_j, \forall j, \ \eta(l) \in \{0, -2\} \right\},$$

记 X_p 里满足 $\eta(l) = 0$ 的元素为 X_p^0, 满足 $\eta(l) = -2$ 的元素为 X_p^{-2}.

在给出本文的主要定理之前, 先给出容许集的性质.

定义 0.2 有限点集 $S = \{i_1, \cdots, i_b\} \subset \mathbb{Z}^2$ $(b > 2)$ 称为容许集, 如果

(1) 对于 S 里任意选择的 $2p+1$ 个向量, 如果存在一个向量 $w \in \mathbb{Z}^2$ 满足

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 - i_4 + \cdots + i_{2p+1} - w = 0, \\ |i_1|^2 - |i_2|^2 + |i_3|^2 - |i_4|^2 + \cdots + |i_{2p+1}|^2 - |w|^2 = 0, \end{cases}$$

则有 $w \in S$;

(2) 对于所有的 $n_j \in \mathbb{Z}$, $\sum_{j=1}^{b} n_j = 0$, $2 \leq \sum_{j=1}^{b} |n_j| \leq 2p+2$, 有

$$\sum_{j=1}^{b} n_j i_j \neq 0;$$

(3) 对于任意的 $n \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$, 至多存在一个点 $\{l, m\} \in \mathbb{Z}^{b+2}$, 这里 $l = \sum_{j=1}^{b} l_j e_j \in X_p$, $m \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$ 满足

$$\begin{cases} n - m + \displaystyle\sum_{j=1}^{b} l_j i_j = 0, \\ |n|^2 - |m|^2 + \displaystyle\sum_{j=1}^{b} l_j |i_j|^2 = 0, \end{cases} \qquad l = \sum_{j=1}^{b} l_j e_j \in X_p^0,$$

或满足

$$\begin{cases} n + m + \displaystyle\sum_{j=1}^{b} l_j i_j = 0, \\ |n|^2 + |m|^2 + \displaystyle\sum_{j=1}^{b} l_j |i_j|^2 = 0, \end{cases} \qquad l = \sum_{j=1}^{b} l_j e_j \in X_p^{-2}.$$

分别称上述的 n, m 是第一型共振 (记为 $n, m \in \mathcal{L}_1$) 和第二型共振 (记为 $n, m \in \mathcal{L}_2$). 易知 n, m 相互唯一确定. 此外, 对于所有的 $l = \sum_{j=1}^{b} l_j e_j \in X_p^{-2}$ 有

$$2 \sum_{j=1}^{b} l_j |i_j|^2 + \left| \sum_{j=1}^{b} l_j i_j \right|^2 \neq 0.$$

(4) 所有的 $n\in\mathbb{Z}^2\backslash S$ 不能既是第一型共振又是第二型共振, 这等价于不存在 $l=\sum_{j=1}^{b}l_je_j\in X_p^0$, $l'=\sum_{j=1}^{b}l'_je_j\in X_p^{-2}$ 和 $m,m'\in\mathbb{Z}^2\setminus S$, 满足

$$\begin{cases}n-m+\displaystyle\sum_{j=1}^{b}l_ji_j=0,\\|n|^2-|m|^2+\displaystyle\sum_{j=1}^{b}l_j|i_j|^2=0,\\n+m'+\displaystyle\sum_{j=1}^{b}l'_ji_j=0,\\|n|^2+|m'|^2+\displaystyle\sum_{j=1}^{b}l'_j|i_j|^2=0.\end{cases}$$

注 0.1 在第一步整理标准形时, 性质 (1) 保证如果非线性项 $2p+2$ 次有 $2p+1$ 次来自于切点容许集, 则共振的另一个指标必在 S 里, 再结合性质 (2) 可知, 如果 $2p+2$ 次全部来自 S 中, 则相同指标必然成对共轭出现, 即一定出现 $q_{i_1}\bar{q}_{i_1}q_{i_2}\bar{q}_{i_2}\cdots q_{i_{p+1}}\bar{q}_{i_{p+1}}$ 型的共振; 性质 (3) 和性质 (4) 描述出现共振的情形最多只有一种情况, 同时还保证不出现 $q_{i_1}\bar{q}_{i_2}q_{i_3}\bar{q}_{i_4}\cdots q_{i_{2p-3}}\bar{q}_{i_{2p-2}}\bar{q}_{i_{2p-1}}\bar{q}_{i_{2p}}z_nz_n$ 型的共振. 本文通过容许集的假设, 保证了第一步标准形足够简洁. 关于容许集的存在性, 请参考 [21, Proposition 14].

本文主要结果是

定理 0.1 令 $S=\{i_1,\cdots,i_b\}\subset\mathbb{Z}^2$ $(b>2)$ 是容许集, $\varphi_2^0=\int_{\mathbb{T}^m}\varphi_2(\bar{\theta}_2)\mathrm{d}\bar{\theta}_2\neq 0$. 则存在一个正测度的 Cantor 集 $\mathcal{C}$, 使得对于任意的 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_b)\in\mathcal{C}$, 非线性薛定谔方程 (0.1) 有如下形式的一族小振幅解析的拟周期解:

$$u(\bar{\omega}t,\widetilde{\omega}_1t,\widetilde{\omega}_2t,\cdots,\widetilde{\omega}_bt,x)=\sum_{j=1}^{b}\sqrt{\xi_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\widetilde{\omega}_jt}\phi_{i_j}+O(|\xi|^{\frac{3}{2}}),\quad \widetilde{\omega}_j=\varepsilon^{-3p}(|i_j|^2+\varphi_1^0)+O(|\xi|^p).$$

上述定理是定理 3.1 的直接推论, 为了给出这个无穷维 KAM 定理, 本文将在第 1 节给出所需的函数空间及相应的范数, 第 2 节对所给方程做第一步标准形的整理, 第 3 节将给出一个适合于所给方程的无穷维 KAM 定理, 并在后面两节给出无穷维 KAM 定理的证明框架.

1 函数空间

首先, 记集合 $\{i_1,\cdots,i_b\}$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 中给定的 b 个向量, 令 $\mathbb{Z}_1^2=\mathbb{Z}^2\setminus\{i_1,\cdots,i_b\}$, $z=(\cdots,z_n,\cdots)_{n\in\mathbb{Z}_1^2}$ 以及复共轭 $\bar{z}=(\cdots,\bar{z}_n,\cdots)_{n\in\mathbb{Z}_1^2}$. 定义加权范数

$$\|z\|_\rho=\sum_{n\in\mathbb{Z}_1^2}|z_n|\mathrm{e}^{|n|\rho},$$

其中 $|n|=\sqrt{n_1^2+n_2^2}$, $n=(n_1,n_2)$, 并且 $\rho>0$. 定义 $\mathbb{T}^{b+m}\times\{I=0\}\times\{z=0\}\times\{\bar{z}=0\}$ 的一个邻域

$$D_\rho(r,s)=\{(\theta,I,z,\bar{z}):|\mathrm{Im}\,\theta|<r,\,|I|<s^2,\,\|z\|_\rho<s,\,\|\bar{z}\|_\rho<s\},$$

这里 $|\cdot|$ 指复向量的上确界范数, 用 $\mathcal{O}$ 表示在 $\mathbb{R}^b$ 中的一个正测度的参数集. 记 $\alpha\equiv(\cdots,\alpha_n,\cdots)_{n\in\mathbb{Z}_1^2}$, $\beta\equiv(\cdots,\beta_n,\cdots)_{n\in\mathbb{Z}_1^2}$, $\alpha_n,\beta_n\in\mathbb{N}$, 并且 α 和 β 是只含有有限多个正整数的非负整数元素的向量, 乘积 $z^\alpha\bar{z}^\beta$ 表示 $\prod_n z_n^{\alpha_n}\bar{z}_n^{\beta_n}$. 任意给定的函数

$$F(\theta,I,z,\bar{z})=\sum_{\alpha,\beta,k\in\mathbb{Z}^{b+m},l\in\mathbb{N}^b}F_{kl\alpha\beta}(\xi)I^l\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}z^\alpha\bar{z}^\beta$$

在 Whitney 意义下是关于参数 ξ 的 C_W^{4p}- 光滑函数 (后面对参数 ξ 的导数都是在 Whitney 意义下求导). 定义

$$\|F\|_{\mathcal{O}}=\sum_{\alpha,\beta,k,l}\left(\sup_{\xi\in\mathcal{O}}\sum_{0\le d\le 4p}|\partial_\xi^d F_{kl\alpha\beta}|\right)|I^l|\mathrm{e}^{|k||\mathrm{Im}\theta|}|z^\alpha||\bar{z}^\beta|,$$

则 F 的加权范数[1]

$$\|F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}\equiv\sup_{D_\rho(r,s)}\|F\|_{\mathcal{O}}.\tag{1.1}$$

对于函数 F, 定义由 F 生成的向量场 $X_F=(F_I,-F_\theta,\{\mathrm{i}F_{z_n}\}_{n\in\mathbb{Z}_1^2},\{-\mathrm{i}F_{\bar{z}_n}\}_{n\in\mathbb{Z}_1^2})$ 的范数

$$\begin{aligned}\|X_F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}\equiv{}&\|F_I\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}+\frac{1}{s^2}\|F_\theta\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}\\&+\sup_{D_\rho(r,s)}\frac{1}{s}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}_1^2}\|F_{z_n}\|_{\mathcal{O}}\mathrm{e}^{|n|\rho}+\sum_{n\in\mathbb{Z}_1^2}\|F_{\bar{z}_n}\|_{\mathcal{O}}\mathrm{e}^{|n|\rho}\right].\end{aligned}$$

2 Birkhoff 标准形

本节需要先后进行四步变换, 第一步做辛变换, 目的是去掉大的迫力项, 只剩平均项 (正如文 [14] 中类似的处理); 第二步做辛变换, 目的是消掉非线性项里的非共振部分, 这里推广的容许集使得标准形中的非可积项尽可能少, 以使得同调方程尽可能容易求解; 第三步通过作用一角变量变换进行相应的尺度变换, 巧妙地引入了参数, 从而可以将不变环面的频率问题从 KAM 步骤中独立出来处理. 虽然本文已经仔细选择了切方向, 但是由于方程本身非线性项次数的复杂性, 现在的标准形系数是变系数的, 最后仍需要找一个坐标系扭转变换把系数变为常系数的 (这里的变换类似于文 [15], 但更为复杂). 至此, 得到了进行 KAM 迭代步骤前的 Birkhoff 标准形.

下面给出相应的具体变换.

(1) 先引入外频对应的作用一角变量

$$\begin{aligned}(\bar{\theta},J)&=((\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2),(J_1,J_2))\\&=((\bar{\theta}_{11},\cdots,\bar{\theta}_{1m_1},\bar{\theta}_{21},\cdots,\bar{\theta}_{2m_2}),(J_{11},\cdots,J_{1m_1},J_{21},\cdots,J_{2m_2}))\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m,\end{aligned}$$

其中 $m=m_1+m_2$, $\bar{\theta}_1=\bar{\omega}_1 t$, $\bar{\theta}_2=\bar{\omega}_2 t$, 则有

$$\dot{\bar{\theta}}=\frac{\partial H}{\partial J}=\bar{\omega},\quad \dot{J}=-\frac{\partial H}{\partial\bar{\theta}},\quad \dot{q}_n=\mathrm{i}\frac{\partial H}{\partial\bar{q}_n},\quad \dot{\bar{q}}_n=-\mathrm{i}\frac{\partial H}{\partial q_n},\quad n\in\mathbb{Z}^2.$$

1 (1.1) 中定义了标量函数的范数 $\|\cdot\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}$, 对于向量函数 $G:D_\rho(r,s)\times\mathcal{O}\to\mathbb{C}^m$ $(m<\infty)$ 可以类似定义为 $\|G\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}=\sum_{i=1}^m\|G_i\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}$.

哈密顿函数

$$H=\langle\bar{\omega}_1,J_1\rangle+\langle\bar{\omega}_2,J_2\rangle+\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}(\lambda_n+\varphi_1(\bar{\theta}_1))q_n\bar{q}_n+P(\bar{\theta}_2,q,\bar{q})=\Lambda_1+\Lambda_2+P,$$

这里 $\bar{\omega}=(\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2)$, $J=(J_1,J_2)$, $\Lambda_1\equiv\langle\bar{\omega},J\rangle+\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\lambda_n q_n\bar{q}_n$, $\Lambda_2\equiv\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\varphi_1(\bar{\theta}_1)q_n\bar{q}_n$.

下面构造函数 F_1:

$$F_1(\bar{\theta}_1,q,\bar{q})=\sum_{\bar{k}_1\in\mathbb{Z}^{m_1},\,\bar{k}_1\neq0,\,n\in\mathbb{Z}^2}\frac{\mathrm{i}\varphi_1^{\bar{k}_1}}{\langle\bar{k}_1,\bar{\omega}_1\rangle}\bar{q}_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\bar{k}_1,\bar{\theta}_1\rangle},$$

第一个辛变换为 F_1 时间等于 1 的 Hamilton 流映射 $X^1_{F_1}$.

注 2.1 正如文 [14] 中类似的处理, 这里同样可以得到 F_1 是一个有界函数, 即

$$\|F_1\|_{D_\rho(r_+,s_+),\mathcal{O}}\leq c\gamma^{-2}\left(\frac{2\tau+m+1}{r}\right)^{2\tau+m+1}\mathrm{e}^{-(2\tau+m+1)}.$$

从而保证函数 F_1 对应的流映射 $X^1_{F_1}$ 是有定义的.

(2) 对于本文给出的容许集, 给出第二个辛变换, 同样是一个有界函数的时间等于 1 的 Hamilton 流映射 $X^1_{F_2}$. 构造 F_2:

$$F_2=\sum_{\substack{\alpha,\,\beta\in(\mathbb{Z}^2)^N:|\alpha|=|\beta|=p+1\\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^{m+b}}(\alpha_k-\beta_k)k=0,\,\sum_{k\in\mathbb{Z}^{m+b}}(\alpha_k-\beta_k)|k|^2\neq0\\ \sharp S\cap\left\{\frac{\pi(\alpha_k)}{\eta(\alpha_k)},\frac{\pi(\beta_k)}{\eta(\beta_k)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^{m+b}}\geq2p,\,\bar{k}_2\in\mathbb{Z}^{m_2}}}\frac{\mathrm{i}\varphi_2^{\bar{k}_2}}{(p+1)(2\pi)^{2p}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^{m+b}}(\alpha_k-\beta_k)|k|^2)}q^\alpha\bar{q}^\beta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}.$$

注 2.2 相比文章 [14], 由于本文处理的两个迫力项是不同的, 因此根据 φ_1,φ_2 所起作用的不同, F_1,F_2 系数分子部分是区分的, 同时强调由于本文非线性项次数为一般的 $2p+1$ 次, 因此 F_2 的表述是复杂的, 相比 [14–15], 本文显示了引入 [21] 中的一些记号表述的简洁性.

(3) 接下来在切空间引入作用一角变量

$$q_i=\sqrt{I_i+\xi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i},\quad \bar{q}_i=\sqrt{I_i+\xi_i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_i},\quad i\in S,\quad q_n=w_n,\quad \bar{q}_n=\bar{w}_n,\quad n\in\mathbb{Z}^2_1$$

和时间尺度变换

$$\xi\to\varepsilon^3\xi,\quad J\to\varepsilon^5J,\quad I\to\varepsilon^5I,\quad \bar{\theta}\to\bar{\theta},\quad \widetilde{\theta}\to\widetilde{\theta},\quad w\to\varepsilon^{\frac52}w,\quad \bar{w}\to\varepsilon^{\frac52}\bar{w}.$$

(4) 最后进行一步坐标系的扭转, 目的是将标准形化为常系数的. 下面给出变换 Ψ 的具体形式.

$$\begin{cases}\theta_+=\theta,\\ I_+=I-\sum\limits_{n\in\mathcal{L}_1}(w_n\bar{w}_nl^++w_m\bar{w}_ml^-)-\sum\limits_{n'\in\mathcal{L}_2}(w_{n'}\bar{w}_{n'}l^+-w_{m'}\bar{w}_{m'}l^-),\\ \begin{pmatrix}z_n\\ z_m\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle l^+,\theta\rangle}&0\\ 0&\mathrm{e}^{i\langle l^-,\theta\rangle}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_n\\ w_m\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\bar{z}_n\\ \bar{z}_m\end{pmatrix}=\bar{S}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle l^+,\theta\rangle}&0\\ 0&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle l^-,\theta\rangle}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{w}_n\\ \bar{w}_m\end{pmatrix},\quad n\in\mathcal{L}_1,\\ \begin{pmatrix}z_n\\ z_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle l^+,\theta\rangle}&0\\ 0&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle l^-,\theta\rangle}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_n\\ w_m\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\bar{z}_n\\ \bar{z}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle l^+,\theta\rangle}&0\\ 0&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle l^-,\theta\rangle}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{w}_n\\ \bar{w}_m\end{pmatrix},\quad n\in\mathcal{L}_2,\\ z_n=w_n,\quad \bar{z}_n=\bar{w}_n,\quad n\in\mathbb{Z}^2_1\setminus(\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2).\end{cases}$$

注 2.3 容许集的推广保证了第一步标准形整理的顺利进行, 从而可以具体给出扭转的辛变换 Ψ 的具体形式, 其中变换里矩阵 S 的存在性请查阅 [25].

这样, 通过四步关键的复杂变换完成了第一步的 Birkhoff 标准形的整理, 为 KAM 的迭代步骤做好了准备. 为便于书写哈密顿函数, 定义 $\iota=\varepsilon^{-3p}(|i_1|^2+\varphi_1^0,|i_2|^2+\varphi_1^0,\cdots,|i_b|^2+\varphi_1^0)$, $\xi=(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_b})$, $|l|=l^++l^-$,

$$A_r(\xi_1,\cdots,\xi_b)=\sum_{\sum_j k_j=r}\binom{r}{k_1,\cdots,k_b}^2\prod_j \xi_j^{k_j},$$

$$G=\langle l,\nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle^2+4\sum_{\substack{l=l^+-l^-\in X_p^0\\ \alpha\in\mathbb{N}^b,\,|l^++\alpha|_1=p}}(p+1)^4\left[\binom{p}{l^++\alpha}\binom{p}{l^-+\alpha}\right]^2\xi^{l+2\alpha}.$$

至此, 经过四步变换的复杂计算, 哈密顿函数变为

$$H=H_0+P=N+\mathcal{B}+\bar{\mathcal{B}}+P. \tag{2.1}$$

这里

$$\begin{aligned}N=&\langle\varepsilon^{-3p}\bar\omega,J\rangle+\langle\widetilde\omega(\xi),I\rangle+\sum_{n\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2}\Omega_n(\xi)z_n\bar z_n\\&+\sum_{n\in\mathcal{L}_2}[(\Omega_n+\langle l^+,\widetilde\omega\rangle)z_n\bar z_n+(\Omega_m-\langle l^-,\widetilde\omega\rangle)z_m\bar z_m],\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\widetilde\omega_i(\xi)=\varepsilon^{-3p}(|i|^2+\varphi_1^0)+\dfrac{1}{(p+1)(2\pi)^{2p}}\varphi_2^0\partial_{\xi_i}A_{p+1}(\xi),\\ \Omega_n=\varepsilon^{-3p}(|n|^2+\varphi_1^0)+\dfrac{p+1}{(2\pi)^{2p}}\varphi_2^0A_p(\xi),\quad n\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_1,\\ \Omega_n=\varepsilon^{-3p}(|n|^2+\varphi_1^0)+\langle l^+,\iota\rangle+\dfrac{(p+1)\varphi_2^0}{(2\pi)^{2p}}A_p(\xi)+\dfrac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle|l|,\nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\\ \qquad+\dfrac{|\varphi_2^0|}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\sqrt{G},\quad n\in\mathcal{L}_1,\\ \Omega_m=\varepsilon^{-3p}(|m|^2+\varphi_1^0)+\langle l^-,\iota\rangle+\dfrac{(p+1)\varphi_2^0}{(2\pi)^{2p}}A_p(\xi)+\dfrac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle|l|,\nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\\ \qquad-\dfrac{|\varphi_2^0|}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\sqrt{G},\quad n\in\mathcal{L}_1,\end{cases}$$

且

$$\mathcal{B}=\sum_{\substack{l=l^+-l^-\in X_p^{-2}\\ \alpha\in\mathbb{N}^b,\,|l^++\alpha|_1=p-1}}\frac{p\varphi_2^0}{(2\pi)^{2p}}\binom{p-1}{l^++\alpha}\binom{p+1}{l^-+\alpha}\sum_{n\in\mathcal{L}_2}\xi^{\frac{l}{2}+\alpha}z_nz_m,$$

$$\bar{\mathcal{B}}=\sum_{\substack{l=l^+-l^-\in X_p^{-2}\\ \alpha\in\mathbb{N}^b,\,|l^++\alpha|_1=p-1}}\frac{p\varphi_2^0}{(2\pi)^{2p}}\binom{p-1}{l^++\alpha}\binom{p+1}{l^-+\alpha}\sum_{n\in\mathcal{L}_2}\xi^{\frac{l}{2}+\alpha}\bar z_n\bar z_m,$$

其中参数 $\xi\in\mathcal{O}$, 相空间辛结构是 $\mathrm{d}I\wedge\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}\sum_{n\in\mathbb{Z}_1^2}\mathrm{d}z_n\wedge\mathrm{d}\bar z_n$.

3 无穷维 KAM 定理

对于任意的 $\xi\in\mathcal{O}$ 和 H_0, $(\theta,0,0,0)\mapsto(\theta+\omega t,0,0,0)$ 是哈密顿方程对应于相空间的不变环面的特解. 考虑加上扰动 P 的哈密顿函数, 本文的目标是证明, 在 Lebesgue 测度意义下, 对于绝大多数参数值 $\xi\in\mathcal{O}$, 如果 $\|X_P\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}$ 充分小, 则哈密顿函数 $H=N+\mathcal{B}+\bar{\mathcal{B}}+P$ 仍然有不变环面.

下面描述切频 $\omega(\xi)$, 法向频率 $\Omega_n(\xi)$ 以及扰动 P 需要满足的性质:

(A1) 非退化条件: 假设 $\forall\xi\in\mathcal{O}$,

$$\begin{cases}\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial\widetilde{\omega}_1}{\partial\xi},\cdots,\dfrac{\partial\widetilde{\omega}_b}{\partial\xi}\right)=\kappa,\\ \operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial^{|\beta|}\widetilde{\omega}}{\partial\xi^\beta}\,\middle|\,\forall\beta,\,1\le|\beta|\le b-\kappa+1\right)=b,\end{cases}$$

其中 κ 是 $1\le\kappa\le b$ 的一个给定的整数, $\frac{\partial\widetilde{\omega}_1}{\partial\xi},\cdots,\frac{\partial\widetilde{\omega}_b}{\partial\xi}$ 是向量关于参数 ξ 的所有一阶偏导数. 对于一个固定的 β, $\frac{\partial^{|\beta|}\widetilde{\omega}}{\partial\xi^\beta}=(\frac{\partial^{|\beta|}\widetilde{\omega}_1}{\partial\xi^\beta},\cdots,\frac{\partial^{|\beta|}\widetilde{\omega}_b}{\partial\xi^\beta})$.

(A2) 法向频率的渐近增长性:

$$\Omega_n=\varepsilon^{-a}(|n|^2+\varphi_1^0)+\tilde{\Omega}_n,\quad a\ge0,\ n\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_1,$$

其中 $\varphi_1^0=\int_{\mathbb{T}^m}\varphi_1(\bar{\theta}_1)\mathrm{d}\bar{\theta}_1$, $\tilde{\Omega}_n$ 是关于 ξ 的 $C_W^{4p}(\mathcal{O})$- 光滑函数, 并且 $C_W^{4p}(\mathcal{O})$- 范数有上界 L $(L>0)$.

(A3) Melnikov 非共振条件: 令

$$\mathcal{M}_n=\begin{pmatrix}\Omega_n+\langle l^+,\widetilde{\omega}\rangle & -C(l,\alpha)\xi^{\frac{l}{2}+\alpha}\\ C(l,\alpha)\xi^{\frac{l}{2}+\alpha} & -(\Omega_m-\langle l^-,\widetilde{\omega}\rangle)\end{pmatrix},\quad n\in\mathcal{L}_2,$$

其中 $C(l,\alpha)=\sum_{\substack{l=l^+-l^-\in X_p^{-2}\\ \alpha\in\mathbb{N}^b,\,|l^++\alpha|_1=p-1}}\frac{p\varphi_2^0}{(2\pi)^{2p}}\binom{p-1}{l^++\alpha}\binom{p+1}{l^-+\alpha}$. 假设 $\widetilde{\omega}(\xi)$, $\mathcal{M}_n(\xi)\in C_W^{4p}(\mathcal{O})$, 存在 $\gamma,\tau>0$ 满足 (I_2 是 2×2 单位矩阵, I_4 是 4×4 单位矩阵)

$$\begin{aligned}&|\langle k,\omega\rangle|\ge\frac{\gamma}{|k|^\tau},\quad k=(\bar{k},\widetilde{k}),\ \bar{k}\in\mathbb{Z}^m,\ \widetilde{k}\in\mathbb{Z}^b,\ |k|=|\bar{k}|+|\widetilde{k}|>0,\ \omega=(\varepsilon^{-3p}\bar{\omega},\widetilde{\omega}),\\ &|\langle k,\omega\rangle\pm\Omega_n|\ge\frac{\gamma}{|k|^\tau},\quad n\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2,\\ &|\langle k,\omega\rangle\pm\Omega_n\pm\Omega_m|\ge\frac{\gamma}{|k|^\tau},\quad n,m\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2,\\ &|\langle k,\omega\rangle\pm\Omega_i\pm\mu_j|\ge\frac{\gamma}{|k|^\tau},\quad k\ne0,\ i\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2,\ j\in\{1,2\},\\ &\langle k,\omega\rangle\pm\mu_j|\ge\frac{\gamma}{|k|^\tau},\quad k\ne0,\ j\in\{1,2\},\end{aligned}$$

这里 μ_1,μ_2 是二阶矩阵 $\mathcal{M}_{n'}$ 的两个特征值,

$$|\det(\langle k,\omega\rangle I_4\pm\mathcal{M}_n\otimes I_2\pm I_2\otimes\mathcal{M}_{n'})|\ge\frac{\gamma}{|k|^\tau},\quad k\ne0,\ n,n'\in\mathcal{L}_2.$$

注 3.1 本文去掉了文 [14] 中 $\mathcal{M}_n$ $(n\in\mathcal{L}_2)$ 的特征值有非零虚部的条件, 因此本文的非共振条件会更复杂.

(A4) $\mathcal{B}+\bar{\mathcal{B}}+P$ 的正则性: $\mathcal{B}+\bar{\mathcal{B}}+P$ 关于 $I,\theta,z,\bar{z}$ 是实解析的, 并且关于 ξ 是 C_W^{4p}- 光滑的, 而且

$$\|X_{\mathcal{B}}\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}<1,\quad \|X_P\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}<\varepsilon.$$

(A5) 扰动的部分零动量性质和部分规范不变性质: $\mathcal{B}+\bar{\mathcal{B}}+P$ 有下面的部分零动量性质和部分规范不变性质:

$$\mathcal{D}=\left\{\mathcal{B}+\bar{\mathcal{B}}+P:\mathcal{B}+\bar{\mathcal{B}}+P=\sum_{k,l,\alpha,\beta}(\mathcal{B}+\bar{\mathcal{B}}+P)_{kl\alpha\beta}(\xi)I^l\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}z^\alpha\bar{z}^\beta\right\},$$

其中 $k=(\bar{k},\widetilde{k})\in\mathbb{Z}^{b+m}$, $\bar{k}\in\mathbb{Z}^m$, $\widetilde{k}\in\mathbb{Z}^b$, $l\in\mathbb{Z}^b$, α, β 有下面的关系:

$$\sum_{j=1}^b\widetilde{k}_ji_j+\sum_{n\in\mathbb{Z}_1^d}(\alpha_n-\beta_n)n=0,$$

称为部分零动量性质;

$$\sum_{j=1}^b\widetilde{k}_j+\sum_{n\in\mathbb{Z}_1^d}(\alpha_n-\beta_n)=0,$$

称为部分规范不变性质.

注 3.2 由于本文还有外部频率, 因此需要推广零动量性质和规范不变性质, 这仍然是为了规避掉不太好处理的项.

(A6) Töplitz–Lipschitz 性质: 对于任意固定的 $n,m\in\mathbb{Z}^2$, $c\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}$, 极限

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial^2(\mathcal{B}+P)}{\partial z_{n+tc}\partial z_{m-tc}},\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\partial^2(\sum_{n\in\mathbb{Z}_1^2}\tilde{\Omega}_nz_n\bar{z}_n+P)}{\partial z_{n+tc}\partial\bar{z}_{m+tc}},\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\partial^2(\bar{\mathcal{B}}+P)}{\partial\bar{z}_{n+tc}\partial\bar{z}_{m-tc}}$$

都存在. 此外, 存在 $K>0$, 使得当 $|t|>K$ 时, $N+\mathcal{B}+\bar{\mathcal{B}}+P$ 满足

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial^2(\mathcal{B}+P)}{\partial z_{n+tc}\partial z_{m-tc}}-\lim_{t\to\infty}\frac{\partial^2(\mathcal{B}+P)}{\partial z_{n+tc}\partial z_{m-tc}}\right\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}\le\frac{\varepsilon}{|t|}\mathrm{e}^{-|n+m|\rho},\\
&\left\|\frac{\partial^2(\sum_{n\in\mathbb{Z}_1^2}\tilde{\Omega}_nz_n\bar{z}_n+P)}{\partial z_{n+tc}\partial\bar{z}_{m+tc}}-\lim_{t\to\infty}\frac{\partial^2(\sum_{n\in\mathbb{Z}_1^2}\tilde{\Omega}_nz_n\bar{z}_n+P)}{\partial z_{n+tc}\partial\bar{z}_{m+tc}}\right\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}\le\frac{\varepsilon}{|t|}\mathrm{e}^{-|n-m|\rho},\\
&\left\|\frac{\partial^2(\bar{\mathcal{B}}+P)}{\partial\bar{z}_{n+tc}\partial\bar{z}_{m-tc}}-\lim_{t\to\infty}\frac{\partial^2(\bar{\mathcal{B}}+P)}{\partial\bar{z}_{n+tc}\partial\bar{z}_{m-tc}}\right\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}\le\frac{\varepsilon}{|t|}\mathrm{e}^{-|n+m|\rho}.
\end{aligned}$$

注 3.3 性质 (A6) 是为了进行测度估计. 为了保证每步迭代所需的辛变换是存在的, 需要保证非共振条件的存在, 因此要对参数进行挖测度操作, 为了保证最后参数集仍是一个正测度的集合, 要求不能添加无穷多个非共振条件, 而性质 (A6) 保证了从某个足够大的数后面只需要添加有限个非共振条件即可, 这里是通过累次极限的方式得到的.

最后我们陈述无穷维的 KAM 定理.

定理 3.1 假设 (2.1) 中的哈密顿函数 H_0+P 满足假设 (A1)–(A6). 令 $\gamma>0$ 充分小, 则存在一个正数 $\varepsilon=\varepsilon(b,K,\tau,\gamma,r,s,\rho)$, 使得当 $\|X_P\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}<\varepsilon$ 时, 有如下结论:

存在一个 Cantor 集 $\mathcal{O}_\gamma \subset \mathcal{O}$, 且 $\mathrm{meas}(\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_\gamma)=O(\gamma^{\frac{1}{4p}})$, 以及两个关于 θ 解析, 且对于参数 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_b)$ C_W^{4p}- 光滑的映射

$$\Psi:\mathbb{T}^{b+m}\times\mathcal{O}_\gamma\to D_\rho(r,s),\quad \widehat{\omega}:\mathcal{O}_\gamma\to\mathbb{R}^{b+m},$$

其中 Ψ 是 $\frac{\varepsilon}{\gamma^{4p}}$- 接近于平凡嵌入 $\Psi_0:\mathbb{T}^{b+m}\times\mathcal{O}\to\mathbb{T}^{b+m}\times\{0,0,0\}$; $\widehat{\omega}$ 是 ε- 接近于未扰动频率 $\omega=(\varepsilon^{-3p}\bar{\omega},\widetilde{\omega})$. 对于任意的 $\xi\in\mathcal{O}_\gamma$ 和 $\theta\in\mathbb{T}^{b+m}$, 曲线 $t\mapsto\Psi(\theta+\widehat{\omega}(\xi)t,\xi)$ 是哈密顿方程 $H=H_0+P$ 的拟周期解.

通过应用定理 3.1, 证明了本文的主要结果定理 0.1. 为了文章的完整性, 后面本文仅给出证明无穷维 KAM 定理的主要框架定理和命题, 相关的证明请参考文章 [14–15] 中的证明, 其中我们主要去验证本文的方程确实符合定理 3.1 的假设中最难验证的性质 (A1) 和 (A3) 以及解同调方程后每步所构造的函数 F 的有界性, 保证每步迭代所需的辛变换是合理的.

4 起始迭代的性质验证

验证 (A1): $\widetilde{\omega}$ 的雅可比矩阵的元素是关于 ξ 的齐 $p-1$ 次的整系数多项式. 其中 $\frac{\partial\widetilde{\omega}_i}{\partial\xi_j}$ 和 $\frac{\partial\widetilde{\omega}_i}{\partial\xi_i}$ 的系数分别为

$$\frac{p\varphi_2^0}{(2\pi)^{2p}}\binom{p-1}{k_1,\cdots,k_i-1,\cdots,k_j-1,\cdots,k_b}\binom{p+1}{k_1,\cdots,k_b},$$
$$\frac{p\varphi_2^0}{(2\pi)^{2p}}\binom{p-1}{k_1,\cdots,k_i-2,\cdots,k_j,\cdots,k_b}\binom{p+1}{k_1,\cdots,k_b}.$$

存在一个素数 r, 可以整除 $p+1$, 即 $p+1=r^ts$, 这里要求 r 不能整除 s 和 $\binom{p+1}{k_1,\cdots,k_b}$. 首先, 将 $\widetilde{\omega}$ 的雅可比矩阵除以 p, 接着模上 r. 矩阵变为一些只有对角元不为零的矩阵的直和. 因此很容易验证 $\det(\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial\xi})\neq 0$. 因此 (A1) 得证.

验证 (A3): 这一部分证明类似于 [14], 但是由于本文的非线性项的一般性, 细节上的处理又有不同. 接下来, 给出最复杂情形的证明.

情形 1: $n,n'\in\mathcal{L}_1$.

考虑 $\langle k,\omega\rangle\pm\Omega_n\pm\Omega_{n'}$, 有共振条件

$$\begin{cases} n-m+\sum\limits_{j=1}^b l_ji_j=0, \\ |n|^2-|m|^2+\sum\limits_{j=1}^b l_j|i_j|^2=0, \end{cases}\qquad l=l^+-l^-=\sum_{j=1}^b l_je_j\in X_p^0,$$

则特征值为

$$\begin{aligned}&\langle\bar{k},\varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle+\langle\widetilde{k},\iota\rangle\pm\left(\varepsilon^{-3p}(|n|^2+\varphi_1^0)+\langle l^+,\iota\rangle+\frac{p+1}{(2\pi)^{2p}}\varphi_2^0A_p(\xi)\right)\\&\quad+\frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle 2k\pm|l|,\nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\\&\quad\pm\left(\varepsilon^{-3p}(|n'|^2+\varphi_1^0)+\langle l'^+,\iota\rangle+\frac{p+1}{(2\pi)^{2p}}\varphi_2^0A_p(\xi)+\frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle|l'|,\nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\right)\\&\quad\pm\frac{|\varphi_2^0|}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}(\sqrt{G}\pm\sqrt{G'}).\end{aligned}$$

如果有 $l^+ \neq l'^+$, 由于平方根项的存在, 所有特征值必然不恒等于 0. 否则有 $l^+ = l'^+$, 同时 $l^- = l'^-$. 如果特征值是如下形式:

$$
\begin{aligned}
&\langle \bar{k}, \varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle + \langle \widetilde{k}, \iota\rangle + \left(\varepsilon^{-3p}(|n|^2 + \varphi_1^0) + \langle l^+, \iota\rangle + \frac{p+1}{(2\pi)^{2p}}\varphi_2^0 A_p(\xi)\right)\\
&\qquad + \frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle 2k + |l|, \nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\\
&\qquad - \left(\varepsilon^{-3p}(|n'|^2 + \varphi_1^0) + \langle l^+, \iota\rangle + \frac{p+1}{(2\pi)^{2p}}\varphi_2^0 A_p(\xi) + \frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle |l|, \nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\right)\\
&\qquad + \frac{|\varphi_2^0|}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}(\sqrt{G} - \sqrt{G})\\
&\quad = \langle \bar{k}, \varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle + \langle \widetilde{k}, \iota\rangle + \varepsilon^{-3p}(|n|^2 - |n'|^2) + \frac{\varphi_2^0}{p(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle H(A_{p+1}(\xi))k, \xi\rangle,
\end{aligned}
$$

其中 $H(A_{p+1}(\xi))$ 是 $A_{p+1}(\xi)$ 的黑塞矩阵, 我们用素数 r 模上这个黑塞矩阵, 该矩阵变为一些只有对角元不为零的矩阵的直和. 因此, 黑塞矩阵是一个非退化矩阵, 并且很容易验证对于 $k \neq 0$, 有 $H(A_{p+1}(\xi))k \neq 0$. 如果特征值是如下形式:

$$
\begin{aligned}
&\langle \bar{k}, \varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle + \langle \widetilde{k}, \iota\rangle + \left(\varepsilon^{-3p}(|n|^2 + \varphi_1^0) + \langle l^+, \iota\rangle + \frac{p+1}{(2\pi)^{2p}}\varphi_2^0 A_p(\xi)\right)\\
&\qquad + \frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle 2k + |l|, \nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\\
&\qquad + \left(\varepsilon^{-3p}(|n'|^2 + \varphi_1^0) + \langle l^+, \iota\rangle + \frac{p+1}{(2\pi)^{2p}}\varphi_2^0 A_p(\xi) + \frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle |l|, \nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\right)\\
&\qquad + \frac{|\varphi_2^0|}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}(\sqrt{G} - \sqrt{G})\\
&\quad = \langle \bar{k}, \varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle + \langle \widetilde{k}, \iota\rangle + \varepsilon^{-3p}(|n|^2 + |n'|^2 + 2\varphi_1^0) + 2\langle l^+, \iota\rangle + \frac{\varphi_2^0}{p(p+1)(2\pi)^{2p}}\\
&\qquad \times \langle H(A_{p+1}(\xi))(k + |l|) + 2(p+1)^2\nabla_\xi A_p(\xi), \xi\rangle,
\end{aligned}
$$

当 $H(A_{p+1}(\xi))(k + |l|) + 2(p+1)^2\nabla_\xi A_p(\xi) = 0$ 时, 可以找到方程组

$$
\begin{aligned}
&\binom{p+1}{p+1, \cdots, 0}(k+|l|)_1 + \binom{p+1}{p, 1, \cdots}(k+|l|)_2 + \cdots + \binom{p+1}{p, \cdots, 1}(k+|l|)_b\\
&\qquad = -2(p+1)\binom{p}{p, \cdots, 0},\\
&\binom{p+1}{1, p, \cdots}(k+|l|)_1 + \binom{p+1}{0, p+1, \cdots}(k+|l|)_2 + \cdots + \binom{p+1}{0, p, \cdots, 1}(k+|l|)_b\\
&\qquad = -2(p+1)\binom{p}{0, p, \cdots, 0},\\
&\cdots\cdots\\
&\binom{p+1}{1, \cdots, p}(k+|l|)_1 + \binom{p+1}{0, 1, \cdots, p}(k+|l|)_2 + \cdots + \binom{p+1}{0, \cdots, p+1}(k+|l|)_b\\
&\qquad = -2(p+1)\binom{p}{0, \cdots, p}.
\end{aligned}
$$

因此, $k+|l|$ 所有的元素都相等且满足 $[1+(p+1)(b-1)](k+|l|)_1=-2(p+1)$. 显然, 这个方程组是没有整数解的. 所以所有特征值必然不恒等于 0.

情形 2: $n\in\mathcal{L}_1$, $n'\in\mathcal{L}_2$.

令

$$
\begin{aligned}
M=&\big(\langle l,\nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle+2(p+1)A_p(\xi)\big)^2\\
&+4\sum_{\substack{l=l^+-l^-\in X_p^{-2}\\ \alpha\in\mathbb{N}^b,\,|l^++\alpha|_1=p-1}}p^2(p+1)^2\left[\binom{p-1}{l^++\alpha}\binom{p+1}{l^-+\alpha}\right]^2\xi^{l+2\alpha}.
\end{aligned}
$$

这种情形下, 特征值为

$$
\begin{aligned}
&\langle\bar{k},\varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle+\langle\widetilde{k},\iota\rangle\pm\left(\varepsilon^{-3p}(|n|^2+\varphi_1^0)+\langle l^+,\iota\rangle+\frac{p+1}{(2\pi)^{2p}}\varphi_2^0A_p(\xi)\right)\\
&\quad+\frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle 2k\pm|l|,\nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\\
&\quad\pm\left(\varepsilon^{-3p}(|n'|^2+\varphi_1^0)+\langle l'^+,\iota\rangle+\frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle|l'|,\nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\right)\\
&\quad\pm\frac{|\varphi_2^0|}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}(\sqrt{G}\pm\sqrt{M'}).
\end{aligned}
$$

注 4.1 如果 $\sqrt{M'}$ 是纯虚数, 因为此共振情况不出现小除数, 所以不需要对参数集合进行挖测度操作. 本文强调, 这里去掉了保证是纯虚数的条件, 因此需要重新进行挖测度操作, 同时也在非共振条件里反映了本文的复杂性.

如果存在平方根项, 所有特征值必然不恒等于 0. 否则, 平方根项消失. 如果特征值为

$$
\begin{aligned}
&\langle\bar{k},\varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle+\langle\widetilde{k},\iota\rangle+\big(\varepsilon^{-3p}(|n|^2+\varphi_1^0\pm|n'|^2\pm\varphi_1^0)+\langle l^+\pm l'^+,\iota\rangle\big)\\
&\quad+\frac{\varphi_2^0}{2p(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle H(A_{p+1}(\xi))(2k+|l|\pm|l'|)+2(p+1)^2\nabla_\xi A_p(\xi),\xi\rangle,
\end{aligned}
$$

当 $H(A_{p+1}(\xi))(2k+|l|\pm|l'|)+2(p+1)^2\nabla_\xi A_p(\xi)=0$ 时, 同样有一个事实, 即 $2k+|l|\pm|l'|$ 的所有元素都相等, 并且满足

$$[1+(p+1)(b-1)](2k+|l|\pm|l'|)_1=-2(p+1).$$

显然, 这个方程组是没有整数解的. 所以所有特征值必然不恒等于 0.

情形 3: $n,n'\in\mathcal{L}_2$.

在这种情况下, $\langle k,\omega\rangle I\pm\mathcal{M}_n\otimes I_2\pm I_2\otimes\mathcal{M}_{n'}$ 的特征值是

$$
\begin{aligned}
&\langle\bar{k},\varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle+\langle\widetilde{k},\iota\rangle\pm\left(\varepsilon^{-3p}(|n|^2+\varphi_1^0)+\langle l^+,\iota\rangle+\frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle 2k\pm|l|,\nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\right)\\
&\quad\pm\left(\varepsilon^{-3p}(|n'|^2+\varphi_1^0)+\langle l'^+,\iota\rangle+\frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle|l'|,\nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\right)\\
&\quad\pm\frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}(\sqrt{M}\pm\sqrt{M'}).
\end{aligned}
$$

如果有 $l^+ \neq l'^+$, 由于平方根项的存在,所有特征值必然不恒等于 0. 否则 $l^+ = l'^+$, 同时 $l^- = l'^-$. 如果特征值是如下形式:

$$\begin{aligned}
&\langle \bar{k}, \varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle + \langle \widetilde{k}, \iota\rangle + \left(\varepsilon^{-3p}(|n|^2 + \varphi_1^0) + \langle l^+, \iota\rangle + \frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle 2k + |l|, \nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\right)\\
&\quad - \left(\varepsilon^{-3p}(|n'|^2 + \varphi_1^0) + \langle l^+, \iota\rangle + \frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle |l|, \nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\right)\\
&\quad + \frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}(\sqrt{M} - \sqrt{M})\\
&= \langle \bar{k}, \varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle + \langle \widetilde{k}, \iota\rangle + \varepsilon^{-3p}(|n|^2 - |n'|^2) + \frac{\varphi_2^0}{p(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle H(A_{p+1}(\xi))k, \xi\rangle,
\end{aligned}$$

这里 $H(A_{p+1}(\xi))$ 是 $A_{p+1}(\xi)$ 的黑塞矩阵, 用素数 r 模上这个黑塞矩阵. 该矩阵变为一些只有对角元不为零的矩阵的直和. 因此, 黑塞矩阵是一个非退化矩阵, 并且很容易验证对于 $k \neq 0$, 有 $H(A_{p+1}(\xi))k \neq 0$. 如果特征值是如下形式:

$$\begin{aligned}
&\langle \bar{k}, \varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle + \langle \widetilde{k}, \iota\rangle + \left(\varepsilon^{-3p}(|n|^2 + \varphi_1^0) + \langle l^+, \iota\rangle + \frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle 2k + |l|, \nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\right)\\
&\quad + \left(\varepsilon^{-3p}(|n'|^2 + \varphi_1^0) + \langle l^+, \iota\rangle + \frac{\varphi_2^0}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle |l|, \nabla_\xi A_{p+1}(\xi)\rangle\right)\\
&\quad + \frac{1}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}(\sqrt{M} - \sqrt{M})\\
&= \langle \bar{k}, \varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle + \langle \widetilde{k}, \iota\rangle + \varepsilon^{-3p}(|n|^2 + |n'|^2 + 2\varphi_1^0)\\
&\quad + 2\langle l^+, \iota\rangle + \frac{\varphi_2^0}{p(p+1)(2\pi)^{2p}}\langle H(A_{p+1}(\xi))(k + |l|), \xi\rangle,
\end{aligned}$$

当 $H(A_{p+1}(\xi))(k + |l|) = 0$ 时, 这类方程的所有可能解为 $k = -|l|$. 此时, 若 $|n| \neq |m'|$, 则

$$\langle \bar{k}, \varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle + \langle \widetilde{k}, \iota\rangle + \varepsilon^{-3p}(|n|^2 + |n'|^2 + 2\varphi_1^0) + 2\langle l^+, \iota\rangle = \langle \bar{k}, \varepsilon^{-3p}\bar{\omega}\rangle + \varepsilon^{-3p}(|n|^2 - |m'|^2) \neq 0.$$

注 4.2 注意到扰动的部分零动量性质和部分规范不变性确保 φ_1^0 的系数为 0. 因此, 所有特征值必然不恒等于 0. 其它情形证明类似.

由 [14, 引理 3.6], $\det(\langle k, \omega\rangle I \pm \mathcal{M}_n \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'})$ 是一个关于 ξ 次数至多 $4p$ 的多项式函数. 因此,

$$|\partial_\xi^{4p}(\det(\langle k, \omega\rangle I \pm \mathcal{M}_n \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'}))| \geq \frac{1}{2(p+1)(2\pi)^{2p}}|k| \neq 0.$$

通过挖掉参数集合测度至多为 $\mathcal{O}(\gamma^{\frac{1}{4p}})$ 的部分, 有

$$|\det(\langle k, \omega\rangle I \pm \mathcal{M}_n \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'})| \geq \frac{\gamma}{K^\tau}, \quad k \neq 0,\ n, n' \in \mathcal{L}_2,$$

从而保证了每步迭代的辛变换是合理的. 因此 (A3) 满足.

因此, 对于哈密顿函数 (2.1), 通过应用定理 3.1, 我们得到了定理 0.1.

5 迭代步骤

在第 ν 步 KAM 迭代, 考虑哈密顿函数

$$H_\nu = N_\nu + \mathcal{B}_\nu + \bar{\mathcal{B}}_\nu + P_\nu,$$

其中 $\mathcal{B}_\nu + \bar{\mathcal{B}}_\nu + P_\nu$ 定义在 $D_{\rho_\nu}(r_\nu, s_\nu) \times \mathcal{O}_\nu$ 上, 并且哈密顿函数满足假设 (A1)–(A6).

接下来, 主要通过解一个同调方程寻找函数 F, 其时间等于 1 的 Hamilton 流映射 Φ_v 就是迭代需要的辛映射

$$\Phi_v : D_{\rho_\nu}(r_{\nu+1}, s_{\nu+1}) \times \mathcal{O}_\nu \to D_{\rho_\nu}(r_\nu, s_\nu) \times \mathcal{O}_\nu,$$

目的是为了使哈密顿函数越来越接近于一个可积的规范形. 为了保证辛变换的合理性, 需要对参数集进行挖测度操作, 考虑经过辛变换一步迭代之后新的哈密顿函数

$$H_{\nu+1} = H_\nu \circ \Phi_\nu = N_{\nu+1} + \mathcal{B}_{\nu+1} + \bar{\mathcal{B}}_{\nu+1} + P_{\nu+1}$$

在挖掉测度之后的集合 $D_{\rho_{\nu+1}}(r_{\nu+1}, s_{\nu+1}) \times \mathcal{O}_\nu$ 上仍符合上述的迭代假设 (A1)–(A6), 并且满足

$$\|X_{P_{\nu+1}}\|_{D_{\rho_{\nu+1}}(r_{\nu+1},s_{\nu+1}),\mathcal{O}_\nu} = \|X_{H_\nu\circ\Phi_\nu} - X_{N_{\nu+1}+\mathcal{B}_{\nu+1}+\bar{\mathcal{B}}_{\nu+1}}\|_{D_{\rho_{\nu+1}}(r_{\nu+1},s_{\nu+1}),\mathcal{O}_\nu} \le \varepsilon_{\nu+1}.$$

为了简化记号, 下文中没有上标和下标的项代表在第 ν 步的项, 而有上标或下标的项代表在第 $\nu+1$ 步的项. 考虑定义在 $D_\rho(r,s) \times \mathcal{O}$ 的哈密顿函数, 令 $0 < r_+ < r$, 定义

$$s_+ = \frac{1}{4} s \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad \varepsilon_+ = c\gamma^{-(4p+1)} K^{(4p+1)(\tau+1)} (r - r_+)^{-c} \varepsilon^{\frac{4}{3}}.$$

接下来, 说明如何构造一个集合 $\mathcal{O}_+ \subset \mathcal{O}$ (并且量化挖掉的参数集合测度) 和一个辛变换 $\Phi : D_+ \times \mathcal{O}_+ = D_\rho(r_+, s_+) \times \mathcal{O}_+ \to D_\rho(r,s) \times \mathcal{O}$, 保证变换过后的哈密顿函数 $H_+ = N_+ + \mathcal{B}_+ + \bar{\mathcal{B}}_+ + P_+ \equiv H \circ \Phi$ 对于新的 s_+, ε_+, r_+ 和 $\xi \in \mathcal{O}_+$ 仍满足迭代假设 (A1)–(A6).

将扰动项 P 展成 Fourier–Taylor 级数, 令 R 是 P 关于时间 Fourier 指标的截断, $|k| \le K$. 通过比较系数法知, F 的系数 (形式和 R 一致, 只是剔除掉了 R 中的共振项) 满足方程

$$\{N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, F\} + R - P_{0000} - \langle \hat{\omega}, I \rangle - \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} P^{011}_{nn} z_n \bar{z}_n - \hat{\mathcal{B}} - \hat{\bar{\mathcal{B}}} = 0, \tag{5.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\hat{\omega} = \int \frac{\partial P}{\partial I} \mathrm{d}\theta \Big|_{z=\bar{z}=0,\, I=0}, \quad \hat{\mathcal{B}} = \sum_{n\in\mathcal{L}_2} P^{020}_{nm} z_n z_m, \quad \hat{\bar{\mathcal{B}}} = \sum_{n\in\mathcal{L}_2} P^{002}_{nm} \bar{z}_n \bar{z}_m, \\
&N_+ = N + P_{0000} + \langle \hat{\omega}, I \rangle + \sum_n P^{011}_{nn} z_n \bar{z}_n, \\
&\mathcal{B}_+ = \mathcal{B} + \hat{\mathcal{B}}, \quad \bar{\mathcal{B}}_+ = \bar{\mathcal{B}} + \hat{\bar{\mathcal{B}}} = \bar{\mathcal{B}} + \bar{\hat{\mathcal{B}}}, \\
&P_+ = \int_0^1 (1-t)\{\{N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, F\}, F\} \circ \phi^t_F \mathrm{d}t + \int_0^1 \{R, F\} \circ \phi^t_F \mathrm{d}t + (P - R) \circ \phi^1_F.
\end{aligned}$$

命题 5.1 F 满足等式 (5.1), 其中 F_0, F_1 的 Fourier 系数由方程组

$$
\begin{aligned}
&\langle k,\omega\rangle F_{kl00} = \mathrm{i}P_{kl00}, \quad |l|\le 1,\ 0<|k|\le K,\\
&(\langle k,\omega\rangle - \Omega_n)F_n^{k10} = \mathrm{i}P_n^{k10}, \quad |k|\le K,\ n\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2,\\
&(\langle k,\omega\rangle + \Omega_n)F_n^{k01} = \mathrm{i}R_n^{k01}, \quad |k|\le K,\ n\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2,\\
&(\langle k,\omega\rangle I_2 - \mathcal{M}_n)(F_n^{k10}, F_m^{k01})^{\mathrm{T}} = \mathrm{i}(P_n^{k10}, P_m^{k01})^{\mathrm{T}}, \quad |k|\le K,\ n\in\mathcal{L}_2,\\
&(\langle k,\omega\rangle I_2 + \mathcal{M}_n)(F_n^{k01}, F_m^{k10})^{\mathrm{T}} = \mathrm{i}(P_n^{k01}, P_m^{k10})^{\mathrm{T}}, \quad |k|\le K,\ n\in\mathcal{L}_2
\end{aligned}
$$

给出.

F_2 的 Fourier 系数由下列三条命题给出.

情形 1: $n,m\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2$.

命题 5.2 F 满足等式 (5.1), 其中 F_2 的 Fourier 系数由方程组

$$
\begin{aligned}
&(\langle k,\omega\rangle - \Omega_n - \Omega_m)F_{nm}^{k20} = \mathrm{i}P_{nm}^{k20}, \quad |k|\le K,\\
&(\langle k,\omega\rangle - \Omega_n + \Omega_m)F_{nm}^{k11} = \mathrm{i}P_{nm}^{k11}, \quad 0<|k|\le K,\ |k|+|n-m|\ne 0,\\
&(\langle k,\omega\rangle + \Omega_n + \Omega_m)F_{nm}^{k02} = \mathrm{i}P_{nm}^{k02}, \quad |k|\le K
\end{aligned}
$$

给出.

情形 2: $n\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2$, $n'\in\mathcal{L}_2$.

命题 5.3 F 满足等式 (5.1), 其中 F_2 的 Fourier 系数由方程组

$$
\begin{aligned}
&[(\langle k,\omega\rangle - \Omega_n)I_2 - \mathcal{M}_{n'}](F_{nn'}^{k20}, F_{nm'}^{k11})^{\mathrm{T}} = \mathrm{i}(P_{nn'}^{k20}, P_{nm'}^{k11})^{\mathrm{T}},\\
&[(\langle k,\omega\rangle + \Omega_n)I_2 + \mathcal{M}_{n'}](F_{nn'}^{k02}, F_{m'n}^{k11})^{\mathrm{T}} = \mathrm{i}(P_{nn'}^{k02}, P_{m'n}^{k11})^{\mathrm{T}},\\
&[(\langle k,\omega\rangle - \Omega_n)I_2 + \mathcal{M}_{n'}](F_{nn'}^{k11}, F_{nm'}^{k20})^{\mathrm{T}} = \mathrm{i}(P_{nn'}^{k11}, P_{nm'}^{k20})^{\mathrm{T}},\\
&[(\langle k,\omega\rangle + \Omega_n)I_2 - \mathcal{M}_{n'}](F_{n'n}^{k11}, F_{m'n}^{k02})^{\mathrm{T}} = \mathrm{i}(P_{n'n}^{k11}, P_{m'n}^{k02})^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

给出.

情形 3: $n,n'\in\mathcal{L}_2$.

命题 5.4 F 满足等式 (5.1), 其中 F_2 的 Fourier 系数由方程组

$$
\begin{aligned}
&(\langle k,\omega\rangle I_4 - \mathcal{M}_n\otimes I_2 + I_2\otimes\mathcal{M}_{n'})(F_{nn'}^{k11}, F_{nm'}^{k20}, F_{mn'}^{k02}, F_{m'm}^{k11})^{\mathrm{T}}\\
&\qquad = \mathrm{i}(P_{nn'}^{k11}, P_{nm'}^{k20}, P_{mn'}^{k02}, P_{m'm}^{k11})^{\mathrm{T}},\\
&(\langle k,\omega\rangle I_4 + \mathcal{M}_n\otimes I_2 - I_2\otimes\mathcal{M}_{n'})(F_{n'n}^{k11}, F_{m'n}^{k02}, F_{n'm}^{k20}, F_{mm'}^{k11})^{\mathrm{T}}\\
&\qquad = \mathrm{i}(P_{n'n}^{k11}, P_{m'n}^{k02}, P_{n'm}^{k20}, P_{mm'}^{k11})^{\mathrm{T}},\\
&(\langle k,\omega\rangle I_4 - \mathcal{M}_n\otimes I_2 - I_2\otimes\mathcal{M}_{n'})(F_{nn'}^{k20}, F_{nm'}^{k11}, F_{n'm}^{k11}, F_{mm'}^{k02})^{\mathrm{T}}\\
&\qquad = \mathrm{i}(P_{nn'}^{k20}, P_{nm'}^{k11}, P_{n'm}^{k11}, P_{mm'}^{k02})^{\mathrm{T}},\\
&(\langle k,\omega\rangle I_4 + \mathcal{M}_n\otimes I_2 + I_2\otimes\mathcal{M}_{n'})(F_{nn'}^{k02}, F_{m'n}^{k11}, F_{mn'}^{k11}, F_{m'm}^{k20})^{\mathrm{T}}\\
&\qquad = \mathrm{i}(P_{nn'}^{k02}, P_{m'n}^{k11}, P_{mn'}^{k11}, P_{m'm}^{k20})^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

给出.

上述三条命题证明请参考 [14].

接下来, 我们以其中一个方程为例 (其他类似) 考虑

$$Q_{n'}^{-1}[(\langle k,\omega\rangle-\Omega_n)I_2-\mathcal{M}_{n'}]Q_{n'}Q_{n'}^{-1}(F_{nn'}^{k20},F_{nm'}^{k11})^{\mathrm{T}}=\mathrm{i}Q_{n'}^{-1}(P_{nn'}^{k20},P_{nm'}^{k11})^{\mathrm{T}},\quad |k|\le K,$$

这里存在一个可逆矩阵 $Q_{n'}$, 满足 $Q_{n'}^{-1}\mathcal{M}_{n'}Q_{n'}=J_{n'}$ 是一个若尔当标准形, 即

$$[(\langle k,\omega\rangle-\Omega_n)I_2-J_{n'}](\tilde{F}_{nn'}^{k20},\tilde{F}_{nm'}^{k11})^{\mathrm{T}}=\mathrm{i}(\tilde{P}_{nn'}^{k20},\tilde{P}_{nm'}^{k11})^{\mathrm{T}},\quad |k|\le K.$$

这里定义

$$\begin{aligned}(\tilde{F}_{nn'}^{k20},\tilde{F}_{nm'}^{k11})^{\mathrm{T}}&=Q_{n'}^{-1}(F_{nn'}^{k20},F_{nm'}^{k11})^{\mathrm{T}},\\(\tilde{P}_{nn'}^{k20},\tilde{P}_{nm'}^{k11})^{\mathrm{T}}&=Q_{n'}^{-1}(P_{nn'}^{k20},P_{nm'}^{k11})^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

根据二阶若尔当标准形的不同, 有下面两类情况:

$$(\langle k,\omega\rangle-\Omega_n-\mu_1)(\tilde{F}_{nn'}^{k20})=\mathrm{i}(\tilde{P}_{nn'}^{k20}),\quad (\langle k,\omega\rangle-\Omega_n-\mu_2)(\tilde{F}_{nm'}^{k11})=\mathrm{i}(\tilde{P}_{nm'}^{k11}),$$

或

$$\begin{pmatrix}\langle k,\omega\rangle-\Omega_n-\mu & -1\\ 0 & \langle k,\omega\rangle-\Omega_n-\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{F}_{nn'}^{k20}\\ \tilde{F}_{nm'}^{k11}\end{pmatrix}=\mathrm{i}\begin{pmatrix}\tilde{P}_{nn'}^{k20}\\ \tilde{P}_{nm'}^{k11}\end{pmatrix}.$$

估计 $(F_{nn'}^{k20},F_{nm'}^{k11})^{\mathrm{T}}$, $n\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2$, $n'\in\mathcal{L}_2$, 易知

$$\begin{pmatrix}F_{nn'}^{k20}\\ F_{nm'}^{k11}\end{pmatrix}=\mathrm{i}Q_{n'}\begin{pmatrix}\tilde{P}_{nn'}^{k20}\\ \tilde{P}_{nm'}^{k11}\end{pmatrix}\frac{1}{\langle k,\omega\rangle-\Omega_n-\mu}+\mathrm{i}Q_{n'}\begin{pmatrix}\tilde{P}_{nm'}^{k11}\\ 0\end{pmatrix}\frac{1}{(\langle k,\omega\rangle-\Omega_n-\mu)^2}.$$

在假设

$$\varepsilon_{\nu+1}=c\gamma^{-(4p+1)}(r_\nu-r_{\nu+1})^{-c}K_\nu^{(4p+1)(\tau+1)}\varepsilon_\nu^{\frac{4}{3}}$$

下有

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix}F_{nn'}^{k20}\\ F_{nm'}^{k11}\end{pmatrix}\right|&\le c\varepsilon\frac{K^{2\tau}}{\gamma^2}\mathrm{e}^{-\rho|n+n'|}\mathrm{e}^{-|k|r},\\ \left\|\begin{pmatrix}F_{nn'}^{k20}\\ F_{nm'}^{k11}\end{pmatrix}\right\|&\le c\varepsilon_{\nu+1}\frac{K_\nu^{(4p+1)(\tau+1)}}{\gamma^{(4p+1)}}\le\varepsilon_{\nu+1}^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

由小除数假设, 有下面的估计:

$$\begin{aligned}&|F_{kl00}|_{\mathcal{O}}\le\gamma^{-(4p+1)}K^{(4p+1)(\tau+1)}|P_{kl00}|_{\mathcal{O}},\quad 0<|k|\le K,\\&|F_n^{k10}|_{\mathcal{O}},|F_n^{k01}|_{\mathcal{O}}\le\gamma^{-(4p+1)}K^{(4p+1)(\tau+1)}\varepsilon\mathrm{e}^{-|k|r}\mathrm{e}^{-|n|\rho},\\&|F_{nn'}^{k11}|_{\mathcal{O}}\le\gamma^{-(4p+1)}K^{(4p+1)(\tau+1)}\varepsilon\mathrm{e}^{-|k|r}\mathrm{e}^{-|n-n'|\rho},\\&|F_{nn'}^{k20}|_{\mathcal{O}}+|F_{nn'}^{k02}|_{\mathcal{O}}\le\gamma^{-(4p+1)}K^{(4p+1)(\tau+1)}\varepsilon\mathrm{e}^{-|k|r}\mathrm{e}^{-|n+n'|\rho}.\end{aligned}$$

到这里已经找到了所需的辛变换, 并且是合理的. 关于经过一步辛变换之后, 新的标准形以及新的扰动项满足性质 (A5) 和 (A6), 请查阅文 [15]. 至此, 完成一步迭代过程.

下面给出每步迭代过程所需参数的定义. 对于任意 s,ε,r,γ 和所有的 $\nu\geq 1$, 定义

$$r_{\nu+1}=r\left(1-\sum_{i=2}^{\nu+2}2^{-i}\right),\quad \varepsilon_{\nu+1}=c\gamma^{-(4p+1)}(r_\nu-r_{\nu+1})^{-c}K_\nu^{(4p+1)(\tau+1)}\varepsilon_\nu^{\frac{4}{3}},$$

$$\eta_{\nu+1}=\varepsilon_{\nu+1}^{\frac{1}{3}},\quad L_{\nu+1}=L_\nu+\varepsilon_\nu,\quad s_{\nu+1}=2^{-2}\eta_\nu s_\nu=2^{-2(\nu+1)}\left(\prod_{i=0}^{\nu}\varepsilon_i\right)^{\frac{1}{3}}s_0,$$

$$\rho_{\nu+1}=\rho\left(1-\sum_{i=2}^{\nu+2}2^{-i}\right),\quad K_{\nu+1}=c\left(\frac{1}{\rho_v-\rho_{v+1}}\ln\frac{1}{\varepsilon_{v+1}}\right),$$

其中 c 是常数, 参数 $r_0,\varepsilon_0,L_0,s_0$ 和 K_0 分别定义为 r,ε,L,s 和 $\ln\frac{1}{\varepsilon}$. 迭代引理以及收敛性请参考文 [15].

最后给出最重要的测度估计.

为了记号的方便, 令 $\mathcal{O}_{-1}=\mathcal{O}$, $K_{-1}=0$. 然后在第 ν 步 KAM 迭代时不得不挖掉下面的参数集合, 以保证迭代的顺利进行.

$$\mathcal{R}^{\nu+1}=\bigcup_{K_\nu<|k|\leq K_{\nu+1},n,m,n'}(\mathcal{R}_k^{\nu+1}\cup\mathcal{R}_{kn}^{\nu+1}\cup\mathcal{R}_{knm}^{\nu+1}\cup\mathcal{C}_{knn'}^{\nu+1}(\gamma)),$$

其中

$$\mathcal{R}_k^{\nu+1}=\left\{\xi\in\mathcal{O}_\nu:|\langle k,\omega_{\nu+1}\rangle|<\frac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau},\ |k|\neq 0\right\},$$

$$\mathcal{R}_{kn}^{\nu+1}=\left\{\xi\in\mathcal{O}_\nu:\begin{array}{l}|\langle k,\omega_{\nu+1}\rangle\pm\Omega_n^{\nu+1}|<\dfrac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau},\ n\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2,\\ |\langle k,\omega_{\nu+1}\rangle\pm\mu_j^{\nu+1}|<\dfrac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau},\ j\in 1,2\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{R}_{knm}^{\nu+1}=\left\{\xi\in\mathcal{O}_\nu:\begin{array}{l}|\langle k,\omega_{\nu+1}\rangle\pm\Omega_n^{\nu+1}\pm\Omega_m^{\nu+1}|<\dfrac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau},n,m\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2,\\ |\langle k,\omega_{\nu+1}\rangle\pm\Omega_n^{\nu+1}\pm\mu_j^{\nu+1}|<\dfrac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau},n\in\mathbb{Z}_1^2\setminus\mathcal{L}_2,j\in 1,2\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{C}_{knn'}^{\nu+1}=\left\{\xi\in\mathcal{O}_\nu:|\det(\langle k,\omega_{\nu+1}\rangle I_4\pm\mathcal{M}_n^{\nu+1}\otimes I_2\pm I_2\otimes\mathcal{M}_{n'}^{\nu+1})|<\frac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau},\ k\neq 0,\ n,n'\in\mathcal{L}_2\right\},$$

其中

$$\omega_{\nu+1}(\xi)=\omega(\xi)+\sum_{j=0}^{\nu}P_{0l00}(\xi),$$

$$\left|\sum_{j=0}^{\nu}P_{0l00}^j(\xi)\right|_{\mathcal{O}_\nu}<\varepsilon,$$

$$|\Omega_n^{\nu+1}(\xi)-\Omega_n(\xi)|_{\mathcal{O}_\nu}\leq\sum_{j=0}^{\nu}|P_{nn}^{011,j}|\leq\varepsilon.$$

注 5.1 在第 $\nu+1$ 步 KAM 迭代中, 当 $|k|\leq K_\nu$ 时, 小除数条件是自动成立的, 因此只需要挖掉上述的共振集 $\mathcal{R}^{\nu+1}$.

命题 5.5 我们有

$$\operatorname{meas}\Big(\bigcup_{K_\nu<|k|\le K_{\nu+1}}\mathcal{R}_k^{\nu+1}\Big)\le cK_{\nu+1}^{b}\frac{\gamma^{\frac{1}{p}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{p(p+1)}}}=c\frac{\gamma^{\frac{1}{p}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{p(p+1)}-b}},$$

$$\operatorname{meas}\Big(\bigcup_{K_\nu<|k|\le K_{\nu+1},n}\mathcal{R}_{kn}^{\nu}\Big)\le cK_{\nu+1}^{2+b}\frac{\gamma^{\frac{1}{p}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{p(p+1)}}}=c\frac{\gamma^{\frac{1}{p}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{p(p+1)}-b-2}},$$

$$\operatorname{meas}\Big(\bigcup_{K_\nu<|k|\le K_{\nu+1},n,m}\mathcal{R}_{knm}^{\nu+1}\Big)\le c\frac{\gamma^{\frac{1}{p}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{p(p+1)}-b-4}},$$

$$\operatorname{meas}\Big(\bigcup_{K_\nu<|k|\le K_{\nu+1},n,n'}\mathcal{C}_{knn'}^{\nu}\Big)\le c\frac{\gamma^{\frac{1}{4p}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{4p(4p+1)}-b-12}}.$$

注 5.2 在命题 5.5 中需要使用性质 (A6), 主要方法是通过累次极限的技巧, 将无穷多个非共振条件处理成有限多个, 从而得到命题中挖掉的小测度估计, 最终保证了迭代在一个近乎全测的参数集合上收敛. 下面的命题给出具体的估计.

经过无穷步 KAM 迭代, 挖掉参数集的测度, 我们有

命题 5.6 令 $\tau>4p(4p+1)(12+b+1)$, 经过无穷步 KAM 迭代过程, 累计需挖掉的测度是

$$\begin{aligned}\operatorname{meas}\Big(\bigcup_{\nu\ge0}\mathcal{R}^{\nu+1}\Big)&=\operatorname{meas}\Big[\bigcup_{\nu\ge0}\ \bigcup_{K_\nu<|k|\le K_{\nu+1},n,m,n'}\big(\mathcal{R}_k^{\nu+1}\cup\mathcal{R}_{kn}^{\nu+1}\cup\mathcal{R}_{knn'}^{\nu+1}(\gamma)\cup\mathcal{C}_{knn'}^{\nu+1}(\gamma)\big)\Big]\\&\le c\sum_{\nu\ge0}\frac{\gamma^{\frac{1}{4p}}}{K_{\nu+1}}\le c\gamma^{\frac{1}{4p}}.\end{aligned}$$

至此, 完成了定理 3.1 证明过程的两个主要部分: 一是构造迭代程序, 在每一步的迭代过程中, 利用同调方程通过坐标变换消掉哈密顿函数中的不可积部分, 并且新产生的扰动项是上一步扰动项的高阶无穷小量; 二是构造收敛域, 每次迭代过程中都从作用变量的定义域中 "挖掉" 可能使迭代不收敛的变量取值部分, 最终说明了迭代在一个参数的正测度集合上收敛, 并给出了测度估计. 通过应用这个无穷维 KAM 定理得到定理 0.1.

参考文献

[1] Bambusi, D., On long time stability in Hamiltonian perturbations of non-resonant linear PDEs, *Nonlinearity*, 1999, 12(4): 823–850.

[2] Bourgain, J., Construction of quasi-periodic solutions for Hamiltonian perturbations of linear equations and applications to nonlinear PDE, *Internat. Math. Res. Notices*, 1994, 1994(11): 475–497.

[3] Bourgain, J., Quasi-periodic solutions of Hamiltonian perturbations of 2D linear Schrödinger equations, *Ann. of Math. (2)*, 1998, 148(2): 363–439.

[4] Bourgain, J., Construction of periodic solutions of nonlinear wave equations in higher dimension, *Geom. Funct. Anal.*, 1995, 5(4): 629–639.

[5] Bourgain, J., Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 46, Providence, RI: AMS, 1999.

[6] Bourgain, J., On diffusion in high-dimensional Hamiltonian systems and PDE, *J. Anal. Math.*, 2000, 80: 1–35.

[7] Bourgain, J., Green's Function Estimates for Lattice Schrödinger Operators and Applications, Annals of Mathematics Studies, Vol. 158, Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005.

[8] Bourgain, J. and Wang, W.M., Quasi-periodic solutions of nonlinear random Schrödinger equations, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 2008, 10(1): 1–45.

[9] Chierchia, L. and You, J.G., KAM tori for 1D nonlinear wave equations with periodic boundary conditions, *Comm. Math. Phys.*, 2000, 211(2): 497–525.

[10] Craig, W. and Wayne, C.E., Newton's method and periodic solutions of nonlinear wave equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1993, 46(11): 1409–1498.

[11] Eliasson, L.H., Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 1988, 15(1): 115–147.

[12] Eliasson, L.H. and Kuksin, S.B., KAM for the non-linear Schrödinger equation—a short presentation, In: Holomorphic Dynamics and Renormalization, Fields Inst. Commun., Vol. 53, Providence, RI: AMS, 2008, 361–376.

[13] Geng, J.S., Xu, X.D. and You, J.G., An infinite dimensional KAM theorem and its application to the two dimensional cubic Schrödinger equation, *Adv. Math.*, 2011, 226(6): 5361–5402.

[14] Geng, J.S. and Xue, S.S., Invariant tori for two dimensional nonlinear Schrödinger equations with large forcing terms, *J. Math. Phys.*, 2019, 60(5): 052703, 30 pp.

[15] Geng, J.S. and Xue, S.S., Reducible KAM tori for two-dimensional quintic Schrödinger equations, *Sci. Sin. Math.*, 2021, 51: 457–498 (in Chinese).

[16] Kappeler, T. and Pöschel, J., KdV & KAM, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Vol. 45, Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[17] Kuksin, S.B., Hamiltonian perturbations of infinite-dimensional linear systems with an imaginary spectrum, *Funct. Anal. Appl.*, 1987, 21: 192–205.

[18] Kuksin, S.B., Nearly Integrable Infinite-dimensional Hamiltonian Systems, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1556, Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[19] Kuksin, S.B. and Pöschel, J., Invariant Cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation, *Ann. of Math. (2)*, 1996, 143(1): 149–179.

[20] Procesi, C. and Procesi, M., A KAM algorithm for the resonant non-linear Schrödinger equation, *Adv. Math.*, 2015, 272: 399–470.

[21] Procesi, M. and Procesi, C., A normal form for the Schrödinger equation with analytic non-linearities, *Comm. Math. Phys.*, 2012, 312(2): 501–557.

[22] Procesi, M. and Xu, X.D., Quasi-Töplitz functions in KAM theorem, *SIAM J. Math. Anal.*, 2013, 45(4): 2148–2181.

[23] Wang, W.M., Energy supercritical nonlinear Schrödinger equations: quasiperiodic solutions, *Duke Math. J.*, 2016, 165(6): 1129–1192.

[24] Wayne, C.E., Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory, *Comm. Math. Phys.*, 1990, 127(3): 479–528.

[25] Xu, J.X. and You, J.G., Persistence of lower-dimensional tori under the first Melnikov's non-resonance condition, *J. Math. Pures Appl. (9)*, 2001, 80(10): 1045–1067.

[26] You, J.G., Geng, J.S. and Xu, J.X., KAM theory in finite and infinite dimensional spaces, *Sci. Sin. Math.*, 2017, 47: 77–96 (in Chinese).

A KAM Theorem for 2-dimensional Nonlinear Schrödinger Equations with Forcing Terms and $(2p+1)$-nonlinearities

XUE Shuaishuai

(*School of Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing, Jiangsu, 211815, P. R. China*)

Abstract: In this paper, we prove an infinite dimensional KAM theorem and apply it to study 2-dimensional nonlinear Schrödinger equations with different large forcing terms and $(2p+1)$-nonlinearities

$$\mathrm{i}u_t - \Delta u + \varphi_1(\bar{\omega}_1 t)u + \varphi_2(\bar{\omega}_2 t)|u|^{2p}u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{T}^2$$

with periodic boundary conditions. We obtain the existence of a Whitney smooth family of small-amplitude reducible quasi-periodic solutions.

Keywords: Schrödinger equation; reducible KAM tori; small divisor; quasi-periodic